

**Институт импульсных процессов  
и технологий НАН Украины  
Институт прикладных проблем механики и  
математики НАН Украины  
Институт геотехнической механики  
НАН Украины  
Институт гидродинамики СО РАН**

**ИМПУЛЬСНЫЕ ПРОЦЕССЫ  
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД**

*Материалы X Международной  
научной конференции  
(19-22 августа 2013)*



Николаев  
2013

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ УЧЕТА ДЕЙСТВИЯ ОБЪЕМНЫХ СИЛ В РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЯХ БОЛЬЦМАНА

А.Л.Куперштох, д.ф.-м.н., Институт гидродинамики  
им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Россия, г. Новосибирск,  
630090, skn@hydro.nsc.ru

В работе проведено сравнение четырех известных реализаций учета действия объемных сил [1-7] в методе решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann Equation, LBE) [8,9].

В методе LBE в качестве переменных используются одночастичные функции распределения  $N_k$  для всего конечного набора возможных скоростей частиц  $\mathbf{c}_k$ . При наличии объемных сил (внешних и внутренних) уравнения эволюции имеют вид

$$N_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = N_k(\mathbf{x}, t) + \Omega_k(N(\mathbf{x}, t)) + \Delta N_k,$$

где  $\Omega_k$  – оператор столкновений, а  $\Delta N_k$  – изменение функций распределения за счет действия объемных сил. При действии силы  $\mathbf{F}$  на вещество, находящееся в узле, изменение скорости вещества за шаг по времени составляет  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{F} \Delta t / \rho$ .

Первый метод (Shan – Chen) предложен в работе [1]. Метод заключается только в модификации оператора столкновений

$$\Omega_k = (N_k^{eq}(\rho, \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}_+) - N_k(\mathbf{x}, t)) / \tau,$$

где  $\Delta \mathbf{u}_+ = \Delta \mathbf{u} \cdot \tau / \Delta t$ ,  $N_k^{eq}$  – равновесная функция распределения,  $\tau > 0.5$  – безразмерное время релаксации, а  $\Delta N_k = 0$ .

Во втором методе (He – Luo) [2,3] используется явная производная от равновесной функции распределения. В этом случае, изменение функций распределения имеет вид

$$\Delta N_k = \frac{(\mathbf{c}_k - \mathbf{u}) \Delta \mathbf{u}}{\theta} N_k^{eq}(\rho, \mathbf{u}).$$

Третий метод, предложенный Guo в [4], является комбинированным. В операторе столкновений используется  $\Delta \mathbf{u}_+ = \Delta \mathbf{u} / 2$ , а изменение функций распределения равно

$$\Delta N_k = \rho w_k \left( 1 - \frac{1}{2\tau} \right) \left( \frac{\mathbf{c}_k - \mathbf{u}}{\theta} + \frac{(\mathbf{c}_k \mathbf{u})}{\theta^2} \mathbf{c}_k \right) \Delta \mathbf{u}.$$

Известно, что функции распределения, будучи равновесными в локальной области пространства, под действием объемной силы просто сдвигаются на величину  $\Delta \mathbf{u}$ , оставаясь равновесными. Однако для всех трех методов это условие не выполняется, т.е. они являются галилеевски неинвариантными.

В работах [5-7] был предложен метод точной разности (EDM), в котором изменение функций распределения под действием объемных сил равно разности равновесных функций распределения при постоянной плотности

$$\Delta N_k = N_k^{eq}(\rho, \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) - N_k^{eq}(\rho, \mathbf{u}).$$

Во всех трех методах линейные по  $\Delta \mathbf{u}$  члены совпадают. Отличие есть только в членах второго порядка по силе  $(\Delta \mathbf{u})^2$ . Поэтому при умеренных значениях сил все методы дают близкие результаты. Но есть примеры, когда силы не малы. Введем величину отклонения  $\Delta R_k$  каждого из методов от метода EDM. Для метода Shan - Chen [1] имеем

$$\Delta R_k = -\frac{\rho w_k}{2\theta} \left( \frac{(\mathbf{c}_k \Delta \mathbf{u})^2}{\theta} - (\Delta \mathbf{u})^2 \right) (1 - \tau).$$

Для метода He - Luo [2,3] получаем

$$\Delta R_k = -\frac{\rho w_k}{2\theta} \left( \frac{(\mathbf{c}_k \Delta \mathbf{u})^2}{\theta} - (\Delta \mathbf{u})^2 \right),$$

Для метода Guo [4] отклонение от EDM равно

$$\Delta R_k = -\frac{\rho w_k}{8\theta\tau} \left( \frac{(\mathbf{c}_k \Delta \mathbf{u})^2}{\theta} - (\Delta \mathbf{u})^2 \right),$$

Из формул видно, что метод Shan - Chen совпадает с EDM при  $\tau = 1$ , а методы Shan - Chen и Guo совпадают при  $\tau = 0.5$ .

Для сравнения перечисленных методов использовались одномерная модель LBE – D1Q3 (три скорости псевдочастиц) и двумерная модель – D2Q9 (девять скоростей псевдочастиц).

В качестве первого теста использовался короткий импульс силы длительностью  $t = 3\Delta t$  и такой амплитуды, что  $\Delta u = 0.17$ . На рис. 1 показана эволюция функций распределения  $N_0$  и  $N_{-1}$  для модели D1Q3. Только значения, полученные с помощью EDM, совпадают с теорией. Для остальных методов наблюдаются значительные отклонения.

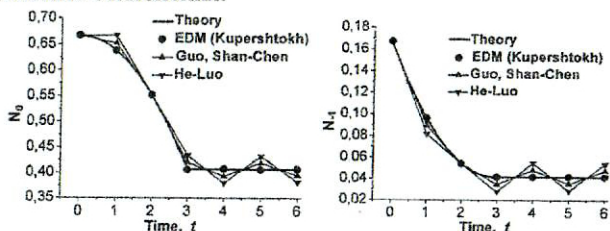


Рис. 1. Изменение функций распределения во время и после короткого импульса силы.  $\tau = 0.51$ .

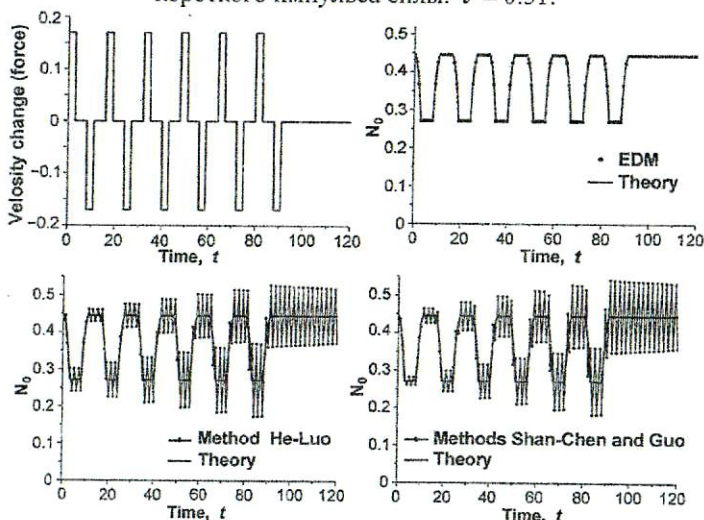


Рис. 2. (а) Периодическая знакопеременная сила. Изменение функции распределения  $N_0$  во времени для методов: (б) EDM, (в) He–Luo, (г) Shan–Chen и Guo.  $\Delta u = 0.17$ .  $\tau = 0.501$ .



Для второго теста использовалась периодическая знакопеременная сила (рис. 2а) с периодом  $8 \Delta t$ . Скважность импульсов равна  $8/3$ . Приведена эволюция во времени функции распределения  $N_0$  для модели D2Q9. Только метод EDM дает правильные значения (рис. 2б) и устойчив при любой частоте и скважности импульсов. Для остальных методов при  $\tau = 0.501$  (малая вязкость) при некоторых значениях периода и формы импульсов происходит «резонанс» (рис. 2в,г), т.е. значения  $N_0$  растут до тех пор, пока не произойдет потеря устойчивости метода LBE.

В последние годы метод LBE адаптирован (в частности, и усилиями авторов данной работы [5,8,9]) для двухфазных течений с границами раздела фаз.

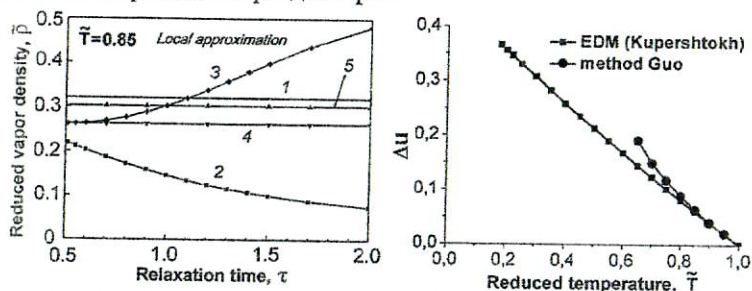


Рис. 3. (а) Плотность пара на кривой сосуществования фаз для УС Ван-дер-Ваальса при  $\tilde{T} = 0.85$ . 1 – теория, 2 – метод He–Luo, 3 – Shan–Chen, 4 – Guo, 5 – EDM. (б) Величина изменения скорости  $\Delta u$  в узлах переходного слоя за шаг по времени.

На рис. 3а показаны зависимости плотности пара на кривой сосуществования фаз. Только в методах Guo и EDM результаты не зависят от  $\tau$ . Достижимые значения  $\Delta u$  в переходном слое жидкость–пар гораздо больше при использовании EDM (рис. 3б). Расчеты устойчивы при понижении приведенной температуры  $\tilde{T}$  до 0.65 для метода Guo и до 0.2 для EDM.

Таким образом, только метод EDM правильно воспроизводит функции распределения и устойчив в широком диапазоне амплитуд и форм действующих сил. При этом

удается смоделировать кривую сосуществования до более низких температур ( $T \approx 0.2T_{cr}$ ), а плотность пара на кривой сосуществования не зависит от  $\tau$

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 13-08-00763 и № 13-01-00526) и междисциплинарных интеграционных проектов СО РАН № 38 и № 79.

1. *Shan X. Chen H.* Lattice Boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components // *Phys. Rev. E.* 1993. V. 47, N 3. P. 1815–1819.

2. *He X., Shan X., Doolen G.D.* Discrete Boltzmann equation model for nonideal gases // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 57, N 1. P. R13–R16.

3. *Luo L.-S.* Unified theory of lattice Boltzmann models for nonideal gases // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81, N 8. P. 1618–1621.

4. *Guo Z., Zheng C., Shi B.* Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method // *Phys. Rev. E.* 2002. V. 65, N 4. P. 046308.

5. *Kupershtokh A.L.* New method of incorporating a body force term into the lattice Boltzmann equation // *Proc. of the 5th International EHD Workshop, Poitiers, France, 2004*, pp. 241–246.

6. *Куперштох А.Л.* Учет действия объемных сил в решеточных уравнениях Больцмана // *Вестник НГУ: Серия “Математика, механика и информатика”*. 2004. Т. 4, № 2. С. 75–96.

7. *Kupershtokh A.L.* Criterion of numerical instability of liquid state in LBE simulations // *Computers and Mathematics with Applications.* 2010. V. 59, N 7. P. 2236–2245.

8. *Kupershtokh A.L., Medvedev D.A., Karpov D.I.* On equations of state in a lattice Boltzmann method // *Computers and Mathematics with Applications.* 2009. V. 58, N 5. P. 965–974.

9. *Куперштох А.Л.* Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость–пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // *Вычислительные методы и программирование.* 2012. Т. 13. С. 130–138.

**COMPARATIVE ANALYSIS OF THE BODY FORCE  
IMPLEMENTATIONS IN THE LATTICE BOLTZMANN  
EQUATION METHOD**

A.L. Kupershtokh

Four methods of the body force implementation in the lattice Boltzmann equation were analyzed. Only the exact difference method is Galilean invariant. It gives results that do not depend on the relaxation time. Moreover, it is more stable in the wide ranges of a velocity change and a temperature.