

УДК 532.7+532.516.5+532.593

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ ПЕРЕД ПРОБОЕМ ЖИДКИХ ДИЭЛЕКТРИКОВ ПУТЕМ ГЕТЕРОГЕННОЙ НУКЛЕАЦИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Куперштох А.Л.

¹*Институт гидродинамики им.М.А.Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*

²*Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия*

АННОТАЦИЯ

Исследуется предложенный ранее механизм неустойчивости жидких диэлектриков в сильных электрических полях — анизотропный распад на двухфазную систему узких парогазовых каналов в жидкости, ориентированных вдоль поля. Для моделирования электрогидродинамических течений в диэлектрике с фазовыми переходами жидкость–пар используется метод решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann Equation, LBE).

Значения критических полей, полученные при численных расчетах по методу LBE для “чистого” диэлектрика, хорошо совпадают с теоретическими значениями для спинодали в электрическом поле.

ВВЕДЕНИЕ

Стабильные состояния вещества лежат вне кривой сосуществования фаз, причем $(\partial p / \partial \rho)_T > 0$. Однородное состояние ниже кривой сосуществования фаз может быть либо метастабильным $(\partial p / \partial \rho)_T > 0$, либо нестабильным $(\partial p / \partial \rho)_T < 0$. Метастабильные состояния могут существовать относительно долго, а затем распадаются на жидкость и пар путем гомогенной и гетерогенной нуклеации [1,2]. Нестабильные состояния термодинамически запрещены, поэтому очень быстро происходит спиноподобная декомпозиция [3]. В [4] было обнаружено влияние электрического поля на область стабильности жидкости.

Объемная сила, действующая на диэлектрическую жидкость в электрическом поле E , выражается формулой Гельмгольца [5]

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} - \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \nabla \varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{2} \nabla \left[E^2 \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \right]. \quad (1)$$

Теоретически было показано [5], что критическая точка и, следовательно, кривая сосуществования фаз сдвигаются из-за действия электрострикционных сил.

Для бинарных систем с растворенным газом величина критического электрического поля при гомогенной нуклеации заметно меньше, чем для “чистого” жидкого диэлектрика.

В данной работе предложена простая модель учета гетерогенной нуклеации. Очевидно, что в этом случае возможен распад как первоначально стабильных, так и метастабильных начальных состояний диэлектрика. Показано, что при наличии растворенных газов и центров гетерогенности критические значения поля значительно уменьшаются до величин 10–20 МВ/см, что близко к значениям полей электрического пробоя.

В работах [6,7] был предложен ранее неизвестный механизм неустойчивости жидких диэлектриков в сильных электрических полях — анизотропный распад на двухфазную систему паровых каналов в жидкости. Принципиально то, что новые участки менее плотной фазы возникают в виде узких каналов, ориентированных вдоль поля. Критические значения электрического поля, при которых происходит распад “чистого” жидкого диэлектрика, определяются полученным в работе [6] уравнением для спинодали вещества в электрическом поле

$$\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\rho}} \right)_T = \frac{\varepsilon_0 E^2 \tilde{\rho}}{2P_{кр}} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tilde{\rho}^2} \right)_T. \quad (2)$$

Здесь и далее будут использованы приведенные переменные $\tilde{p} = p / p_{кр}$, $\tilde{\rho} = \rho / \rho_{кр}$ и $\tilde{T} = T / T_{кр}$, где $p_{кр}$, $\rho_{кр}$ и $T_{кр}$ — значения давления, плотности и температуры флюида в критической точке.

Для диэлектрической проницаемости неполярных жидкостей справедлив закон Клаузиуса – Мосотти [8]

$$\varepsilon(\rho) = 1 + 3\beta\rho / (1 - \beta\rho), \quad (3)$$

где $\beta = \alpha / (3m)$, α – поляризуемость молекулы, m – молекулярная масса. Важно то, что вторая производная от диэлектрической проницаемости флюида по плотности строго больше нуля

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tilde{\rho}^2} = \frac{6\lambda^2}{(1 - \lambda\tilde{\rho})^3} > 0, \quad (4)$$

где $\lambda = \beta\rho_{кр}$. Для параметров, соответствующих аргону, $\lambda = 0.057$ [6,7].

Рассмотренный распад позволяет легко объяснить ряд экспериментально наблюдаемых явлений при пробое жидких диэлектриков [9] (высокие скорости распространения стримерных каналов более 100 км/с, возникновение веера несветящихся каналов пониженной плотности вблизи острия с последующим пробоем одного из них, примерно цилиндрическую форму сегментов каналов и их ветвление). Однако для реализации анизотропного распада “чистых” жидких диэлектриков необходимы электрические поля начиная с нескольких десятков МВ/см. В боль-

шинстве же экспериментов по пробое электрические поля значительно меньше (от нескольких десятых до ~ 10 МВ/см).

В работах [10,11] было исследовано влияние растворенных в жидком диэлектрике газов. Показано, что значения критических полей, необходимых для возникновения парогазовых каналов, существенно уменьшаются, но все равно остаются заметно выше наблюдаемых на практике. Такой распад происходит по механизму спиноподобной декомпозиции первоначально однородного состояния смеси. При этом происходит быстрая диффузия растворенных в жидкости газов в зародыш пониженного давления.

В данной работе предложена модель учета гетерогенной нуклеации. Очевидно, что в этом случае возможен распад как первоначально стабильных, так и метастабильных начальных состояний диэлектрика при полях заметно меньших.

Для расчета электрогидродинамических течений с фазовыми переходами диэлектрика использовался метод решеточных уравнений Больцмана. Метод ЛВЕ широко используется для моделирования течений однофазных и двухфазных сред [12-19].

МЕТОД РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

Метод ЛВЕ основан на решении кинетического уравнения для ансамбля псевдочастиц. Используется небольшой набор скоростей псевдочастиц \mathbf{c}_k – таковой, что векторы $\mathbf{e}_k = \mathbf{c}_k \Delta t$ соответствуют расстояниям до соседних узлов пространственной решетки, где Δt – шаг по времени. Для одномерной модели D1Q3 с тремя векторами скорости $|\mathbf{c}_k| = 0, h/\Delta t$. Для двумерной модели D2Q9 с девятью векторами скорости и для трехмерной модели D3Q19 с 19 векторами скорости $|\mathbf{c}_k| = 0, h/\Delta t, \sqrt{2}h/\Delta t$.

В качестве основных переменных в методе ЛВЕ используются одночастичные функции распределения N_k , имеющие смысл плотности, уравнения эволюции для которых имеют вид

$$N_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = N_k(\mathbf{x}, t) + \Omega_k(N) + \Delta N_k, \quad (5)$$

где $k = 0, \dots, b$. Здесь Ω_k – оператор столкновений, а ΔN_k – изменение функций распределения из-за действия объемных сил (внешних и внутренних).

Оператор столкновений выбирается в виде релаксации к локально равновесному состоянию

$$\Omega_k = (N_k^{eq}(\rho, \mathbf{u}) - N_k(\mathbf{x}, t)) / \tau, \quad (6)$$

где $\tau = t_{rel} / \Delta t$ – безразмерное время релаксации.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Чтобы во флюиде возникли фазовые переходы, необходимо в методе ЛВЕ смоделировать притягивающую ветвь потенциала «межмолекулярного»

равновесные функции распределения $N_k^{eq}(\rho, \mathbf{u})$ определяются формулой

$$N_k^{eq}(\rho, \mathbf{u}) = \rho w_k \left(1 + \frac{\mathbf{c}_k \mathbf{u}}{\theta} + \frac{(\mathbf{c}_k \mathbf{u})^2}{2\theta^2} - \frac{u^2}{2\theta} \right). \quad (7)$$

Коэффициенты w_k зависят от геометрии конкретной решетки. Кинетическая температура псевдочастиц равна $\theta = (h/\Delta t)^2/3$, а кинематическая вязкость $\nu = \theta(\tau - 1/2)\Delta t$ определяется временем релаксации τ .

Плотность вещества ρ и скорость \mathbf{u} (гидродинамические переменные) вычисляются как

$$\rho = \sum_{k=0}^b N_k, \quad \rho \mathbf{u} = \sum_{k=1}^b \mathbf{c}_k N_k. \quad (8)$$

Изменения функций распределения из-за действия объемных сил вычисляются по методу точной разности (Exact Difference Method, EDM) [20-21]

$$\Delta N_k(\mathbf{x}, t) = N_k^{eq}(\rho, \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) - N_k^{eq}(\rho, \mathbf{u}), \quad (9)$$

где $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{F} \Delta t / \rho$ – изменение скорости вещества за шаг по времени, а \mathbf{F} – полная сила, действующая на вещество в узле.

взаимодействия. Для этого в работе [14] были введены силы притяжения, действующие на вещество в узле со стороны соседних узлов. Позже в [22] было

предложено записать полную силу \mathbf{F} , действующую на вещество в узле, как градиент псевдопотенциала U , определяемого через уравнение состояния вещества

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\nabla(p(\rho, T) - \rho\theta). \quad (10)$$

Вместо контактной границы в методе LBE моделируется тонкий переходной слой жидкость–пар, в котором плотность изменяется плавно на размерах нескольких узлов решетки (метод сквозного счета границ раздела фаз). При этом на границах раздела появляется поверхностное натяжение, которое уменьшается при повышении температуры и обращается в ноль в критической точке.

В работе [15] было предложено ввести функцию $\Phi = \sqrt{-U}$. Тогда выражение для силы (10) можно переписать в эквивалентном виде

$$\mathbf{F}_N = 2A\nabla(\Phi^2) + (1 - 2A)2\Phi\nabla\Phi, \quad (11)$$

где A – свободный параметр, позволяющий добиться точного описания плотностей фаз на кривой фазового равновесия. Конечно-разностная формула

для уравнения (11), обеспечивающая достаточную изотропность, имеет вид [15,16]

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha h} \left[A \sum_{k=1}^b G_k \Phi^2(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k + (1 - 2A)\Phi(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^b G_k \Phi(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k \right]. \quad (12)$$

Здесь $G_k > 0$ – коэффициенты, различные для основных и диагональных направлений решетки.

Для диэлектрика (жидкость и пар) в данной работе используется уравнение состояния Ван-дер-Ваальса

$$\tilde{p} = \frac{8\tilde{\rho}\tilde{T}}{3 - \tilde{\rho}} - 3\tilde{\rho}^2. \quad (13)$$

Для растворенного газа используется обычное газовое уравнение состояния $\tilde{P} = \tilde{\rho}\tilde{T}$.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСТВОРЕННОГО В ЖИДКОСТИ ГАЗА

Проведено моделирование распада бинарных смесей типа жидкий диэлектрик – растворенный газ. Для этого использовались два комплекта функций распределения. Уравнения эволюции для функций распределения каждого из компонентов s (жидкость) и σ (газ) имеют вид

$$N_k^{s,\sigma}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = N_k^{s,\sigma}(\mathbf{x}, t) + \Omega_k^{s,\sigma} + \Delta N_k^{s,\sigma}, \quad (14)$$

где $\Omega_k^{s,\sigma} = (N_k^{eq}(\rho^{s,\sigma}, \mathbf{u}^{s,\sigma}) - N_k^{s,\sigma}(\mathbf{x}, t)) / \tau$ – оператор столкновений, а

$$\Delta N_k^{s,\sigma} = N_k^{eq}(\rho^{s,\sigma}, \mathbf{u}^{s,\sigma} + \Delta \mathbf{u}^{s,\sigma}) - N_k^{eq}(\rho^{s,\sigma}, \mathbf{u}^{s,\sigma}) \quad (15)$$

– изменения функций распределения за счет действия объемных сил, в том числе и обеспечивающих фазовые переходы (EDM).

Здесь $\rho^s = \sum_k N_k^s$ и $\rho^\sigma = \sum_k N_k^\sigma$ – плотности вещества компонентов смеси, а $\mathbf{u}^s = \sum_k N_k^s \mathbf{c}_k / \rho^s$ и $\mathbf{u}^\sigma = \sum_k N_k^\sigma \mathbf{c}_k / \rho^\sigma$ – скорости компонентов в данном узле.

ЦЕНТРЫ ГЕТЕРОГЕННОСТИ

В жидких диэлектриках возможно присутствие как твердых микрочастиц, так и микропузырьков.

Ограниченная взаимная растворимость газа в жидкости моделировалась силами отталкивания, действующими в узле i на вещество каждого компонента со стороны вещества другого компонента, присутствующего в соседних узлах k . Суммарные силы, действующие на вещество компонентов в узле за счет этих сил отталкивания, имеют вид

$$\mathbf{F}^s(\mathbf{x}) = \psi[\rho^s(\mathbf{x})] \sum_k B_k \psi[\rho^\sigma(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k)] \mathbf{e}_k, \quad (16a)$$

$$\mathbf{F}^\sigma(\mathbf{x}) = \psi[\rho^\sigma(\mathbf{x})] \sum_k B_k \psi[\rho^s(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k)] \mathbf{e}_k. \quad (16b)$$

Все коэффициенты B_k выражаются через один параметр взаимодействия компонентов $B < 0$, определяющий степень малости взаимной растворимости компонент. Здесь $\psi(\rho)$ – положительная возрастающая функция от плотности соответствующего компонента, вид которой определяет зависимость растворимости от давления. В расчетах параметр взаимодействия компонентов был принят $B = -0.05$.

Твердые частицы могут быть плохо смачиваемыми или нести на себе пузырьки газовой фазы. Кроме то-

го, в работах [23-24] обсуждается вопрос о существовании в жидкости так называемых бабстонов (bubbles stabilized by ions) – пузырьков растворенного газа размерами порядка 40 Å, устойчивость которых обеспечивается ионами на их поверхности. Теоретическая оценка концентрации бабстонов [23] дает величину 10^{11} см^{-3} .

В данной работе предложена простая модель учета гетерогенной нуклеации, позволяющая описать влияние таких микрочастиц и микропузырьков на критические значения электрического поля.

Гетерогенные зародыши в жидком диэлектрике моделировались набором из n маленьких частиц, не имеющих размера и массы, распределенных случайным образом внутри флюида. Частицы переносились веществом как пассивная примесь в соответствии с

локальной скоростью жидкости \mathbf{u} в точке с координатами $\mathbf{r}_i(t)$. Соответственно, уравнения движения для частиц имели вид

$$\mathbf{r}_i(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}_i(t))\Delta t, \quad i = 1, \dots, n. \quad (17)$$

Частицы считались слабо смачиваемыми. Для этого в ближайшем к частице узле решетки \mathbf{x} вместо значения функции $\Phi(\rho^s(\mathbf{x}))$ в формуле (12) использовалось значение $\Phi(h\rho_{\text{жн}})$, где коэффициент h определяет степень смачиваемости, а $\rho_{\text{жн}}$ – плотность жидкости на кривой насыщения при данной температуре. Полное смачивание (взаимодействие жидкость-жидкость) соответствует $h = 1$.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

При моделировании использовалась одномерная D1Q3 модель LBE.

Введем безразмерное значение квадрата напряженности электрического поля $\tilde{A} = \varepsilon_0 E^2 / (2P_{\text{кр}})$. Теоретические значения этой величины по формуле (2) в зависимости от начальной плотности “чистого” диэлектрика приведены на рис. 1. Здесь же показаны критические значения, полученные при численных расчетах по методу LBE (●) для начальных состояний, лежащих на спинодали без электрического поля $E = 0$ и на кривой сосуществования фаз (насыщенный пар и жидкость). Наблюдается хорошее совпадение. Кривые 1, 2 – $\tilde{T}_0 = 0.9$, кривые 3, 4 – $\tilde{T}_0 = 0.8$.

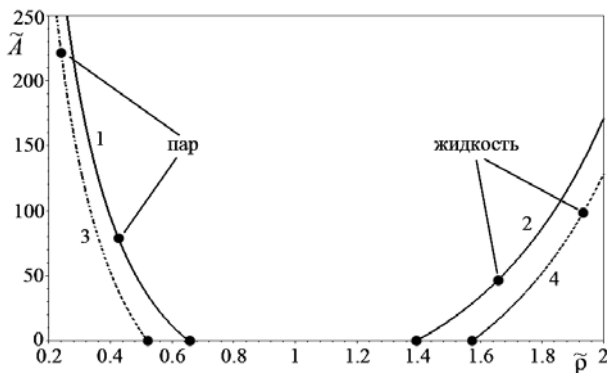


Рис. 1 Зависимость критических значений \tilde{A} от начальной плотности “чистого” флюида. Кривые – теоретические оценки по формуле (2). Точки – расчеты методом LBE.

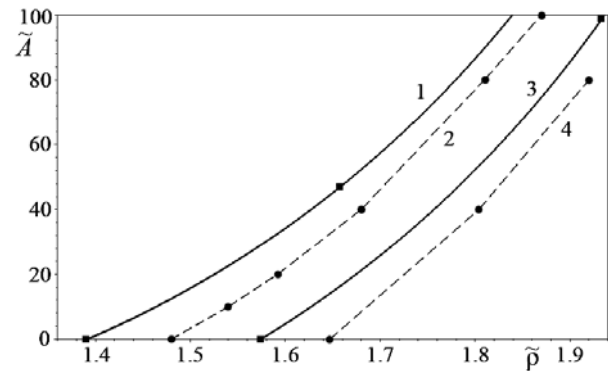


Рис. 2 Зависимость критических значений \tilde{A} от начальной плотности жидкости. Кривые 1, 3 – теоретические значения для “чистой” жидкости (2). Точки – расчеты методом LBE. Для жидкости с растворенным газом – точки на кривых 2, 4.

Для бинарных систем с растворенным газом величина критического электрического поля заметно меньше, чем для чистого жидкого диэлектрика (рис. 2, кривые 2, 4). Кривые 1, 2 – $\tilde{T}_0 = 0.9$, кривые 3, 4 – $\tilde{T}_0 = 0.8$. Плотность растворенного газа составляла 0.003, что соответствует концентрации порядка 0.1 %. Параметр взаимодействия компонентов $B = -0.05$.

При расчетах с центрами гетерогенности электрическое поле включалось через некоторое время (100000 шагов) для успокоения бегающих волн сжатия. Учет центров гетерогенности в виде слабо смачиваемых частиц ($h\tilde{\rho}_{\text{нп}} = 1.442$) (без растворенных газов) тоже снижает критические значения поля (рис. 3, кривая 3).

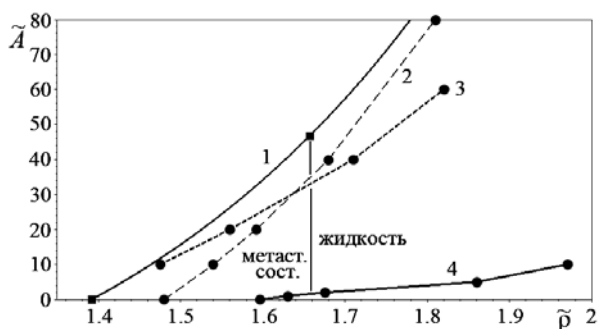


Рис. 3 Зависимость критических значений \tilde{A} от начальной плотности жидкости. Кривая 1 – теоретические значения (2). Точки – расчеты методом ЛВЕ для жидкости с растворенным газом (кривая 2), при наличии центров гетерогенности (кривая 3). Кривая 4 – одновременный учет этих факторов. $\tilde{T}_0 = 0.9$.

При наличии и центров гетерогенности ($h\tilde{\rho}_{\text{нп}} = 1.442$), и растворенных газов критические значения поля значительно падают (рис. 3, кривая 4, $\tilde{A} \sim 1-5$) до величин 10–20 МВ/см, что близко к значениям полей электрического пробоя.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что в жидких диэлектриках под действием сильных электрических полей возможен распад на двухфазную систему узких парогазовых каналов в жидкости, ориентированных вдоль поля, что приводит к электрическому пробоя в каналах.

Значения критических полей, полученные при численных расчетах по методу ЛВЕ для “чистого” диэлектрика, хорошо совпадают с теоретическими значениями для спинодали в электрическом поле. Для бинарных систем с растворенным газом величина критического электрического поля при гомоген-

ной нуклеации заметно меньше, чем для “чистого” жидкого диэлектрика.

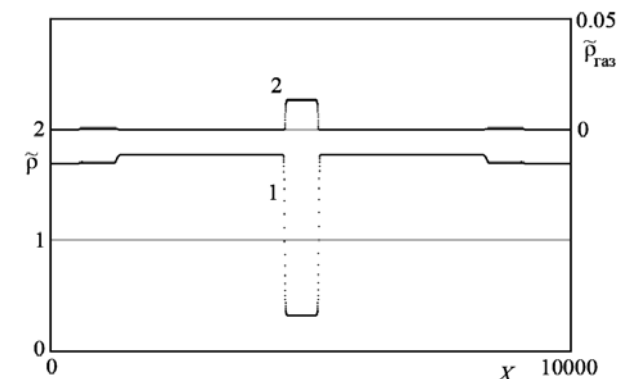


Рис. 4 Распределение плотности флюида (кривая 1) и газа (кривая 2) после распада. Расчеты методом ЛВЕ для жидкого диэлектрика с растворенным газом и центром гетерогенности. $\tilde{T}_0 = 0.9$, $\tilde{A} = 10$.

ной нуклеации заметно меньше, чем для “чистого” жидкого диэлектрика.

Предложена простая модель учета гетерогенной нуклеации. Показано, что при наличии растворенных газов и центров гетерогенности в виде слабо смачиваемых частиц критические значения поля значительно уменьшаются до величин 10–20 МВ/см, что близко к значениям полей электрического пробоя жидких диэлектриков. Возникновение парогазовых “пузырьков” сопровождается генерацией расходящихся волн сжатия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. – М.-Л.: Изд-во Академии наук СССР, 1945. – 424 с.
Frenkel, J. (1946). “Kinetic Theory of Liquids”, Oxford Univ. Press, 485 p.
2. Скрипов В.П. Метастабильная жидкость. – М.: Наука, 1972. – 311 с.
Skripov, V.P. (1974). “Metastable Liquids”, Wiley, New York, 272 p.
3. Зельдович Я.Б., Тодес О.М. Кинетика образования двухфазных систем вблизи критической точки // ЖЭТФ. – 1940. – Т. 10, № 12. – С. 1441–1445.

Zel'dovich, Ya.B. and Todes, O.M. (1940). “The kinetics of formation of two-phase systems near the critical point”, *J. Exp. Theor. Phys.*, Vol. 10, No. 12, pp. 1441–1445.

4. Parmar, D.S. and Jalaluddin, A.K. (1973). “Determination of the limit of absolute thermodynamic stability of liquid using external electric fields as perturbation”, *Phys. Lett.*, Vol. 42A, No. 7, pp. 497–498.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Гос. изд-во. физ.-мат. литературы. 1959. – 532 с.
Landau, L.D. and Lifshitz, E.M. (1985).

- “Electrodynamics of Continuous Media”. Oxford, Pergamon Press Inc., 532 p.
6. Kupershtokh, A.L. and Medvedev, D.A. (2006). “Anisotropic instability of a dielectric liquid in a strong uniform electric field: Decay into a two-phase system of vapor filaments in a liquid”, *Phys. Rev. E*, Vol. 74, No. 2, p. 021505.
 7. Карпов Д.И., Куперштох А.Л. Анизотропный спиноподобный распад полярного диэлектрика в сильном электрическом поле: метод молекулярной динамики // Письма в ЖТФ. – 2009. – Т. 35, Вып. 10. – С. 87–94.
Karpov, D.I. and Kupershtokh, A.L. (2009). “Anisotropic spinodal decomposition of a polar dielectric in a strong electric field: Molecular dynamics simulations”, *Technical Physics Letters*, Vol. 35, No. 5, pp. 479–482.
 8. Шахпоронов М.И. Методы исследования теплового движения молекул и строения жидкостей. – М.: Изд-во Московского университета, 1963. – 281 с.
Shahporonov, M.I. (1963). *Methods of study of thermal movement of molecules and structure of liquids*, Moscow University Press, USSR, 281 p.
 9. An, W., Baumung, K. and Bluhm, H. (2007). “Underwater streamer propagation analyzed from detailed measurements of pressure release”, *J. Appl. Phys.*, Vol. 101, No. 5, p. 053302.
 10. Куперштох А.Л. Трехмерное моделирование методом ЛВЕ на гибридных GPU-кластерах распада бинарной смеси жидкого диэлектрика с растворенным газом на систему парогазовых каналов // Вычислительные методы и программирование. – 2012. – Т. 13. – С. 384–390.
Kupershtokh, A.L. (2012). “Three-dimensional LBE simulations on hybrid GPU-clusters of the decay of a binary mixture of liquid dielectrics with a solute gas to a system of gas-vapor channels”, *Numerical Methods and Programming*, Vol. 13, pp. 384–390.
 11. Kupershtokh, A.L. (2014). “Three-dimensional LBE simulations of a decay of liquid dielectrics with a solute gas into the system of gas-vapor channels under the action of strong electric fields”, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 67, No. 2, pp. 340–349.
 12. Chen, S. and Doolen, G.D. (1998). “Lattice Boltzmann method for fluid flow”, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 30, pp. 329–364.
 13. Aidun, C.K. and Clausen, J.R. (2010). “Lattice-Boltzmann Method for Complex Flows”, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 42, pp. 439–472.
 14. Shan, X. and Chen, H. (1993). “Lattice Boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components”, *Phys. Rev. E*, Vol. 47, No. 3, pp. 1815–1819.
 15. Куперштох А.Л. Моделирование течений с границами раздела фаз жидкость-пар методом решеточных уравнений Больцмана // Вестник НГУ: Серия “Математика, механика и информатика”. – 2005. – Т. 5, № 3. – С. 29–42.
Kupershtokh, A.L. (2005). “Simulation of flows with liquid-vapor interfaces by the lattice Boltzmann method”, *Vestnik NGU (Quart. J. of Novosibirsk State Univ.), Series: Math., Mech. and Informatics*, Vol. 5, No. 3, pp. 29–42.
 16. Kupershtokh, A.L., Medvedev, D.A. and Karpov, D.I. (2009). “On equations of state in a lattice Boltzmann method”, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 58, No. 5, pp. 965–974.
 17. Куперштох А.Л. Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость-пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // Вычислительные методы и программирование. – 2012. – Т. 13. – С. 130–138.
Kupershtokh, A.L. (2012). “Three-dimensional simulations of two-phase liquid-vapor systems on GPU using the lattice Boltzmann method”, *Numerical Methods and Programming*, Vol. 13, pp. 130–138.
 18. Куперштох А.Л., Медведев Д.А., Грибанов И.И. Моделирование теплопереноса в среде с фазовыми переходами методом решеточных уравнений Больцмана // Вычислительные методы и программирование. – 2014. – Т. 15. – С. 317–328.
Kupershtokh, A.L., Medvedev, D.A. and Griбанov, I.I. (2014). “Modeling of thermal flows in a medium with phase transitions using the lattice Boltzmann method”, *Numerical Methods and Programming*, Vol. 15, pp. 317–328.
 19. Chen, L., Kang, Q., Mu, Y., He, Y.-L. and Tao W.-Q. (2014). “A critical review of the pseudopotential multiphase lattice Boltzmann model: Methods and applications”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 76, pp. 210–236.
 20. Куперштох А.Л. Учет действия объемных сил в решеточных уравнениях Больцмана // Вестник НГУ: Серия “Математика, механика и информатика”. – 2004. – Т. 4, № 2. – С. 75–96.
Kupershtokh, A.L. (2004). “Incorporating a body force term into the lattice Boltzmann equation”, *Vestnik NGU (Quart. J. of Novosibirsk State Univ.), Series: Math., Mech. and Informatics*, Vol. 4, No. 2, pp. 75–96.
 21. Kupershtokh, A.L. (2010). “Criterion of numerical instability of liquid state in LBE simulations”, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 59, No. 7, pp. 2236–2245.

22. Qian, Y.H. and Chen, S. (1997). "Finite size effect in lattice-BGK models", *International Journal of Modern Physics C*, Vol. 8, No. 4, pp. 763–771.
23. Бункин Н.Ф., Бункин Ф.В. Бабстоны: стабильные микроскопические газовые пузыри в слабых растворах электролитов // *ЖЭТФ*. – 1992. – Т. 101, № 2. – С. 512–527.
Bunkin, N.F. and Bunkin, F.V. (1992). "Bubstones stable microscopic gas bubbles in very dilute electrolytic solution", *Sov. Phys. J. Exp. Theor. Phys.*, Vol. 74, No. 2, pp. 271–276.
24. Бункин Н.Ф., Виноградова О.И., Куклин А.И., Лобеев А.В., Мовчан Т.Г. К вопросу о наличии воздушных субмикробузырей в воде: Эксперимент по малоугловому рассеянию нейтронов // *Письма в ЖЭТФ*. – 1995. – Т. 62, № 3. – С. 659–662.
Bunkin, N.F., Vinogradova, O.I., Kuklin, A.I., Lobeev, A.V. and Movchan, T.G. (1995). "Presence of submicroscopic air bubbles in water. Small-angle neutron scattering experiment", *J. Exp. Theor. Phys. Lett.*, Vol. 62, No. 8, pp. 685–688.