

О МОНОТОННОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ ПО ВРЕМЕНИ СХЕМЫ КАБАРЕ

О.А. Ковыркина, В. В. Остапенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Новосибирский государственный университет

olyana@ngs.ru, ostapenko_vv@ngs.ru

Проведен анализ монотонности двухслойной по времени схемы кабарэ. Показано, что не существует локальной однократной коррекции потоковых переменных, которая бы обеспечивала монотонность этой схемы при любых монотонных начальных данных. Предложена модификация двухслойного по времени варианта схемы кабарэ, связанная с двойной коррекцией потоковых переменных, которая в случае переменного шага по времени гарантирует монотонность этой схемы при любых числах Куранта, при которых она является устойчивой. Приведены результаты тестовых расчетов, иллюстрирующие преимущества модифицированной схемы.

Ключевые слова: двухслойная по времени схема кабарэ, монотонность, коррекция потоковых переменных

ON MONOTONY OF TWO LAYER IN TIME KABARET SCHEME

O.A. Kovyrkina, V.V. Ostapenko

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SD RAS, Novosibirsk

Novosibirsk State University

The monotony analysis of two-layer in time cabaret scheme is carried out. It is shown that there is no local unitary correction of flux variables which would provide monotony of this scheme at any monotonous initial data. It is offered a modification of two-layer in time cabaret scheme, connected with double correction of flux variables, which in case of a variable time step guarantees monotony of the scheme at any Currant numbers at which it is stable. The results of the test calculations illustrating advantages of the modified scheme are listed.

Key words: two-layer in time cabaret scheme, monotony, correction of flux variables

Введение.

Для численного решения уравнений одномерной газовой динамики [1, 2] была предложена балансно-характеристическая разностная схема [3], которая на классическом тесте Blast Wave [4] показала существенные преимущества по сравнению с известными монотонными схемами повышенной точности. Предложенная схема имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях, является консервативной, явной, условно устойчивой в линейном приближе-

нии при числах Куранта $r \in (0,1]$. Основные достоинства этой схемы связаны с тем, что при аппроксимации линейного уравнения переноса с постоянным шагом по времени, без учета нелинейной коррекции потоков, она эквивалентна трехслойной по времени схеме кабаре [5, 6], которая является точной при двух различных числах Куранта $r=0.5$ и $r=1$. В настоящее время двухслойный по времени вариант схемы кабаре эффективно применяется для моделирования пространственно двумерных газодинамических [7] и гидравлических [8] течений.

Было показано [9], что предложенная в [3] схема с однократной коррекцией потоков в случае постоянного шага по времени является монотонной [10] при числах Куранта $r \in (0,0.5]$ и немонотонной при числах Куранта $r \in (0.5,1]$. В связи с этим в [9] была предложена двойная коррекция потоков, обеспечивающая при постоянном шаге по времени монотонность схемы кабаре при всех числах Куранта $r \in (0,1]$, при которых она является устойчивой.

При численном моделировании по схеме кабаре реальных физических процессов [7, 8] применяется ее двухслойный по времени вариант, в котором шаг по времени является переменным. В настоящей работе показано, что не существует локальной однократной коррекции потоковых переменных, которая бы обеспечивала монотонность такой схемы при любых монотонных начальных данных. Предложена модификация двухслойного по времени варианта схемы кабаре, связанная с двойной коррекцией потоковых переменных, которая в случае переменного шага по времени гарантирует монотонность этой схемы при любых числах Куранта, при которых она является устойчивой. Приведены результаты тестовых расчетов, иллюстрирующие преимущества модифицированной схемы.

1. Двухслойная по времени схема кабаре, аппроксимирующая линейное уравнение переноса.

Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения переноса

$$v_t + av_x = 0, \quad a = a(t, x) > 0, \quad v(t, 0) = v_0(x), \quad (1.1)$$

которую аппроксимируем двухслойной по времени схемой кабаре [7, 8], заданной на прямоугольной разностной сетке

$$\{t_n, x_j\}: \quad t_{n+1} = t_n + \tau_{n+1/2}, \quad t_0 = 0; \quad x_{j+1} - x_j = h_{j+1/2}. \quad (1.2)$$

В этой схеме используются потоковые $u_j^n = u(t_n, x_j)$ и консервативные $U_{j+1/2}^n = U(t_n, x_{j+1/2})$ переменные, заданные соответственно в целых x_j и полуцелых $x_{j+1/2} = x_j + h_{j+1/2}/2$ пространственных узлах. Пусть $u_j^n, U_{j+1/2}^n$ – известное численное решение задачи (1.1) на n -ом временном слое (при $n=0$ – сеточная аппроксимация начальной функции $v_0(x)$).

Двухслойная по времени схема кабаре [7, 8] реализуется в три этапа. На первом этапе по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1/2} - U_{j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + a_{j+1/2}^{n+1/2} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h_{j+1/2}} = 0, \quad (1.3)$$

при записи которых использовано обозначение $f_{j+1/2}^{n+1/2} = f(t_{n+1/2}, x_{j+1/2})$, где $t_{n+1/2} = t_n + \tau_{n+1/2}/2$, вычисляются значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1/2}$ на полуцелом временном слое $t_{n+1/2}$.

На втором этапе с учетом того, что $a_{j+1/2}^{n+1/2} > 0$, по известным величинам u_j^n , $U_{j+1/2}^{n+1/2}$ находятся предварительные значения потоков на $(n+1)$ -ом временном слое

$$\bar{u}_{j+1}^{n+1} = 2U_{j+1/2}^{n+1/2} - u_j^n, \quad (1.4)$$

которые, исходя из принципа максимума, корректируются по формуле

$$u_{j+1}^{n+1} = F(\bar{u}_{j+1}^{n+1}, m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n), \quad (1.5)$$

в которой

$$m_{j+1/2}^n = \min(u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}, u_{j+1}^n), \quad M_{j+1/2}^n = \max(u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}, u_{j+1}^n), \quad (1.6)$$

$$F(u, m, M) = \begin{cases} u, & \text{если } m \leq u \leq M \\ m, & \text{если } u < m \\ M, & \text{если } u > M \end{cases}. \quad (1.7)$$

На третьем этапе по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} + a_{j+1/2}^{n+1/2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h_{j+1/2}} = 0 \quad (1.8)$$

определяются консервативные переменные на $(n+1)$ -ом временном слое. Отметим, что уравнения (1.8) с учетом (1.3) эквивалентны симметричным по времени уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + a_{j+1/2}^{n+1/2} \frac{u_{j+1}^{n+1/2} - u_j^{n+1/2}}{h_{j+1/2}} = 0, \quad (1.9)$$

в которых

$$u_j^{n+1/2} = \frac{u_j^n + u_j^{n+1}}{2}. \quad (1.10)$$

Разностная схема (1.3)-(1.8) является условно устойчивой по Куранту при ограничениях

$$\tau_{n+1/2} \leq \frac{\min_j h_{j+1/2}}{\max_j a_{j+1/2}^{n+1/2}} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad r_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{a_{j+1/2}^{n+1/2} \tau_{n+1/2}}{h_{j+1/2}} \leq 1 \quad (1.11)$$

и в областях, где потоки не корректируются, т. е. удовлетворяют условию

$$\bar{u}_{j+1}^{n+1} \in [m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n] \quad \Rightarrow \quad u_{j+1}^{n+1} = \bar{u}_{j+1}^{n+1},$$

имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях. При условиях

$$a = a(t, x) = a_{j+1/2}^{n+1/2} = \text{const}, \quad h = h_{j+1/2} = \text{const}, \quad \tau = \tau_{n+1/2} = \text{const}$$

эта схема эквивалентна трехслойной по времени схеме кабаре [5, 6], которая является точной при числах Куранта $r = 0.5, 1$.

Если начальная функция $v_0(x)$ является монотонной, то точное решение $v(t, x)$ задачи (1.1), в том числе и разрывное, также является монотонной функцией по x при всех $t > 0$. С учетом этого, следуя С. К. Годунову [10], разностную схему, аппроксимирующую задачу (1.1), будем называть монотонной, если она сохраняет монотонность сеточных начальных данных при переходе от одного временного слоя к другому. Поскольку линейные разностные схемы второго и более высоких порядков аппроксимации являются немонотонными, то для построения монотонных разностных схем повышенной точности приходится использовать различные минимаксные процедуры коррекции потоков, приводящие к нелинейным схемам даже при аппроксимации линейных уравнений. С учетом этого рассмотрим вопрос о монотонности схемы (1.3)-(1.9).

2. О монотонности двухслойной по времени схемы кабаре.

Следуя [10], введем понятие монотонности двухслойной по времени схемы кабаре.

Определение 1. Разностная схема кабаре является монотонной, если она каждое монотонное разностное решение $u_j^n, U_{j+1/2}^n$ переводит за один временной шаг в монотонное разностное решения $u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}$ того же знака монотонности, т. е. если

$$u_j^n \geq U_{j+1/2}^n \geq u_{j+1}^n \quad \forall j, \quad (2.1)$$

то тогда

$$u_j^{n+1} \geq U_{j+1/2}^{n+1} \geq u_{j+1}^{n+1} \quad \forall j; \quad (2.2)$$

если

$$u_j^n \leq U_{j+1/2}^n \leq u_{j+1}^n \quad \forall j, \quad (2.3)$$

то тогда

$$u_j^{n+1} \leq U_{j+1/2}^{n+1} \leq u_{j+1}^{n+1} \quad \forall j. \quad (2.4)$$

Покажем, что в силу определения 1 схема кабаре (1.3)-(1.9) монотонной не является. Для этого предположим, что ее разностное решение на n -ом временном слое является монотонно убывающим, т. е. удовлетворяет неравенствам (2.1). Тогда на первом этапе (1.3) при вычислении консервативных переменных

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} = U_{j+1/2}^n - \frac{r_{j+1/2}^{n+1/2}}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) \quad (2.5)$$

получим, что с учетом (2.1)

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} \geq u_{j+1}^n \Leftrightarrow U_{j+1/2}^n + \frac{r_{j+1/2}^{n+1/2}}{2} u_j^n \geq \left(1 + \frac{r_{j+1/2}^{n+1/2}}{2}\right) u_{j+1}^n. \quad (2.6)$$

Из формулы (2.5) с учетом (1.10) также следует, что

$$u_j^n \geq U_{j+1/2}^{n+1/2}, \text{ если } U_{j+1/2}^n \in [u_{j+1}^n, V_{j+1/2}^n]; \quad u_j^n \leq U_{j+1/2}^{n+1/2}, \text{ если } U_{j+1/2}^n \in [V_{j+1/2}^n, u_j^n], \quad (2.7)$$

где

$$V_{j+1/2}^n = \left(1 - \frac{r_{j+1/2}^{n+1/2}}{2}\right) u_j^n + \frac{r_{j+1/2}^{n+1/2}}{2} u_{j+1}^n \in [u_{j+1}^n, u_j^n].$$

На втором этапе, после корректировки (1.5)–(1.7) предварительных значений потоков (1.4) с учетом неравенств (2.6) и (2.7) получим

$$\max(u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}) \geq u_{j+1}^{n+1} \geq u_{j+1}^n. \quad (2.8)$$

На третьем этапе из уравнения (1.8) с учетом (1.3) или (что тоже самое) из уравнения (1.9) найдем

$$U_{j+1/2}^{n+1} = U_{j+1/2}^n - r_{j+1/2}^{n+1/2} (u_{j+1}^{n+1/2} - u_j^{n+1/2}) = U_{j+1/2}^n - \frac{r_{j+1/2}^{n+1/2}}{2} (u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - u_j^n - u_j^{n+1}). \quad (2.9)$$

Для монотонности схемы кабре по определению 1 необходимо, чтобы полученное на $(n+1)$ -ом временном слое разностное решение u_j^{n+1} , $U_{j+1/2}^{n+1}$ удовлетворяло неравенствам (2.2).

Проверим сначала выполнение неравенства

$$U_{j+1/2}^{n+1} = U_{j+1/2}^n - \frac{r_{j+1/2}^{n+1/2}}{2} (u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - u_j^n - u_j^{n+1}) \geq u_{j+1}^{n+1}, \quad (2.10)$$

которое можно записать в виде

$$U_{j+1/2}^n + \frac{r_{j+1/2}^{n+1/2}}{2} (u_j^n + u_j^{n+1} - u_{j+1}^n) \geq \left(1 + \frac{r_{j+1/2}^{n+1/2}}{2}\right) u_{j+1}^{n+1}. \quad (2.11)$$

Поскольку с учетом (2.8) $u_j^{n+1} \geq u_j^n$, то неравенство (2.11) будет выполнено при условии

$$u_{j+1}^{n+1} \leq \frac{2U_{j+1/2}^n + r_{j+1/2}^{n+1/2} (2u_j^n - u_{j+1}^n)}{2 + r_{j+1/2}^{n+1/2}}. \quad (2.12)$$

Предположим, что предварительное значение потока \bar{u}_j^{n+1} , вычисленное по формуле (1.4) с учетом (2.5) удовлетворяет неравенству

$$\bar{u}_j^{n+1} = 2U_{j-1/2}^{n+1/2} - u_{j-1}^n = 2U_{j-1/2}^n - r_{j-1/2}^{n+1/2} (u_j^n - u_{j-1}^n) - u_{j-1}^n \leq u_j^n, \quad (2.13)$$

которое перепишем в виде

$$2U_{j-1/2}^n \leq (1 - r_{j-1/2}^{n+1/2}) u_{j-1}^n + (1 + r_{j-1/2}^{n+1/2}) u_j^n.$$

Если $r_{j-1/2}^{n+1/2} < 1$, то это неравенство будет выполнено, например, при следующих условиях на значения монотонно убывающего разностного решения на n -ом временном слое

$$u_{j-1}^n = \frac{2U_{j-1/2}^n}{1-r_{j-1/2}^{n+1/2}} > U_{j-1/2}^n > u_j^n \geq 0. \quad (2.14)$$

В этом случае с учетом того, что $U_{j-1/2}^{n+1/2} \geq u_j^n$ в результате корректировки (1.5) потока \bar{u}_j^{n+1} получим $u_j^{n+1} = \min(u_{j-1}^n, U_{j-1/2}^{n+1/2}, u_j^n) = u_j^n$. Это означает, что при условиях (2.14) неравенства (2.10) и (2.12) становятся эквивалентными и тем самым ограничение, задаваемое неравенством (2.12), является необходимым условием монотонности схемы кабре.

Проверим теперь выполнение неравенства

$$U_{j+1/2}^{n+1} = U_{j+1/2}^n - \frac{r_{j+1/2}^{n+1/2}}{2} (u_{j+1}^n + u_{j+1}^{n+1} - u_j^n - u_j^{n+1}) \leq u_j^{n+1}, \quad (2.15)$$

которое можно записать в виде

$$U_{j+1/2}^n - \frac{r_{j+1/2}^{n+1/2}}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) \leq \frac{r_{j+1/2}^{n+1/2}}{2} u_{j+1}^{n+1} + \left(1 - \frac{r_{j+1/2}^{n+1/2}}{2}\right) u_j^{n+1}. \quad (2.16)$$

Поскольку $u_j^{n+1} \geq u_j^n$, то неравенство (2.16) будет выполнено при условии

$$u_{j+1}^{n+1} \geq \frac{2U_{j+1/2}^n + r_{j+1/2}^{n+1/2} (u_j^n - u_{j+1}^n) - (2 - r_{j+1/2}^{n+1/2}) u_j^n}{r_{j+1/2}^{n+1/2}} = \frac{2(U_{j+1/2}^n - (1 - r_{j+1/2}^{n+1/2}) u_j^n)}{r_{j+1/2}^{n+1/2}} - u_{j+1}^n. \quad (2.17)$$

Если $u_j^{n+1} = u_j^n$, что в частности имеет место при условиях (2.14), то тогда неравенства (2.15) и (2.17) эквивалентны.

Для совместности неравенств (2.12) и (2.17) необходимо выполнение условия

$$\frac{2U_{j+1/2}^n + r_{j+1/2}^{n+1/2} (2u_j^n - u_{j+1}^n)}{2 + r_{j+1/2}^{n+1/2}} \geq \frac{2(U_{j+1/2}^n - (1 - r_{j+1/2}^{n+1/2}) u_j^n)}{r_{j+1/2}^{n+1/2}} - u_{j+1}^n,$$

которое после преобразований можно записать в виде

$$2(u_j^n - U_{j+1/2}^n) \geq r_{j+1/2}^{n+1/2} (u_j^n - u_{j+1}^n). \quad (2.18)$$

Очевидно, что неравенство (2.18) не будет выполнено при всех функциях u_j^n , $U_{j+1/2}^n$, удовлетворяющих условию монотонного убывания (2.1). В частности, если $u_j^n = U_{j+1/2}^n > u_{j+1}^n$, то тогда неравенство (2.18) будет нарушено при всех числах Куранта $r_{j+1/2}^{n+1/2} > 0$. Это означает, что схема кабре (1.3)-(1.9) является немонотонной в смысле определения 1 при всех числах Куранта, удовлетворяющих условию устойчивости (1.11).

Для иллюстрации данного утверждения рассмотрим следующий пример монотонно убывающего на n -ом временном слое разностного решения

$$u_{j-1}^n = \frac{2b}{1-r}, \quad U_{j-1/2}^n = u_j^n = U_{j+1/2}^n = b > 0, \quad u_{j+1}^n = 0, \quad r_{j-1/2}^{n+1/2} = r_{j+1/2}^{n+1/2} = r < 1/2. \quad (2.19)$$

Вычисляя предварительное значение потока \bar{u}_j^{n+1} по формуле (2.13), получим

$$\bar{u}_j^{n+1} = 2U_{j-1/2}^n - r_{j-1/2}^{n+1/2} (u_j^n - u_{j-1}^n) - u_{j-1}^n = -rb < 0 < u_j^n = b,$$

поэтому с учетом корректировки (1.5) $u_j^{n+1} = u_j^n = b$. Определяя по формуле (2.5) значение консервативной переменной $U_{j+1/2}^{n+1/2}$, найдем

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} = U_{j+1/2}^n - \frac{r_{j+1/2}^{n+1/2}}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) = \left(1 + \frac{r}{2}\right) b.$$

Вычисляя предварительное значение потока \bar{u}_{j+1}^{n+1} , получим

$$\bar{u}_{j+1}^{n+1} = 2U_{j+1/2}^{n+1/2} - u_j^n = (1+r)b > \max(u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}, u_{j+1}^n) = (1+r/2)b. \quad (2.20)$$

Корректировка (1.5) этого значения даст следующий результат $u_{j+1}^{n+1} = (1+r/2)b > u_j^{n+1} = b$. Тем самым на $(n+1)$ -ом временном слое разностное решение теряет свойство монотонного убывания даже относительно потоковых переменных u_j^{n+1} .

Поскольку значения u_j^n и $U_{j+1/2}^{n+1/2}$ расположены левее, а значение u_{j+1}^n – правее, характеристики AB (рис. 1), вдоль которой с n -го временного слоя переносится в узел (t_{n+1}, x_{j+1}) значение $v(t_{n+1}, x_{j+1})$ точного решения задачи (1.1), то возможное усиление процедуры коррекции потоков (1.5)-(1.7), основанное на принципе максимума, связано с заменой в этой процедуре величин $m_{j+1/2}^n$ и $M_{j+1/2}^n$ на величины

$$\bar{m}_{j+1/2}^n = \min(u_{j+1}^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}), \quad \bar{M}_{j+1/2}^n = \max(u_{j+1}^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}), \quad (2.21)$$

как это было сделано в работе [3], или на величины

$$\bar{m}_{j+1/2}^n = \min(u_{j+1}^n, \max(U_{j+1/2}^{n+1/2}, u_j^n)), \quad \bar{M}_{j+1/2}^n = \max(u_{j+1}^n, \min(U_{j+1/2}^{n+1/2}, u_j^n)), \quad (2.22)$$

что согласуется с традиционными минимаксными процедурами коррекции потоков [11]. В результате такой усиленной коррекции (как по формуле (2.21), так и по формуле (2.22)) поток (2.20) примет значение $u_{j+1}^{n+1} = b = u_j^{n+1}$, что обеспечит сохранение монотонного убывания потоковых переменных на $(n+1)$ -ом временном слое. Однако применяя формулу (2.9) получим, что $U_{j+1/2}^{n+1} = (1+r/2)b$, и тем самым полное разностное решение u_j^{n+1} , $U_{j+1/2}^{n+1}$, в котором чередуются потоковые и консервативные переменные, имеет в узле $j+1/2$ строгий локальный максимум, что приводит к его немонотонности на $(n+1)$ -ом временном слое.

Из неравенства (2.18) следует, что не существует локальной однократной коррекции потоковых переменных типа (1.5)-(1.7), обеспечивающей монотонность схемы кабре в смысле определения 1. Поэтому в следующем разделе предлагается модификация этой коррекции, гаранти-

рующая монотонность схемы кабаре при всех числах Куранта, при которых она является устойчивой.

3. Коррекция потоковых переменных, обеспечивающая монотонность схемы кабаре.

В основе коррекции потоковых переменных, обеспечивающей монотонность двухслойной по времени схемы кабаре, лежит предложенный в [9] подход, связанный с сохранением монотонности разностного решения относительно последовательности чередующихся значений потоковых и консервативных переменных, взятых на двух различных временных слоях, отстоящих друг от друга на половину временного шага. Если в работе [9] значения потоковых переменных, входящих в эти последовательности брались на целых, а консервативных переменных – на полуцелых временных слоях, то в данной работе при построении таких последовательностей значения потоковых переменных будем брать на полуцелых, а консервативных переменных – на целых временных слоях.

Предполагая, что разностное решение $u_j^n, U_{j+1/2}^n$ на n -ом временном слое является монотонно убывающим (2.1), потребуем, чтобы монотонно убывающей по j была последовательность $\{u_j^{n+1/2}, U_{j+1/2}^n\}$ значений этого решения, т. е., чтобы

$$u_j^{n+1/2} \geq U_{j+1/2}^n \geq u_{j+1}^{n+1/2} \quad \forall j. \quad (3.1)$$

Поскольку значение $u_{j+1}^{n+1/2}$ переносится в точку $(t_{n+1/2}, x_{j+1})$ вдоль характеристики CD (рис. 1), выходящей на n -ом временном слое из некоторой точки $C \in (x_{j+1/2}, x_{j+1})$, то неравенства (3.1) будут выполнены, если к значению $u_{j+1}^{n+1/2}$ применить принцип максимума, в силу которого

$$U_{j+1/2}^n \geq u_{j+1}^{n+1/2} \geq u_{j+1}^n. \quad (3.2)$$

Эти неравенства с учетом (1.10) можно переписать в виде ограничений

$$w_{j+1/2}^n = 2U_{j+1/2}^n - u_{j+1}^n \geq u_{j+1}^{n+1/2} \geq u_{j+1}^n \quad (3.3)$$

на значения потоков на $(n+1)$ -ом временном слое.

Будем считать, что неравенства (3.2) выполнены, а значит, выполнены и неравенства (3.1). Выясним, при каких условиях из монотонного убывания (3.1) последовательности значений $\{u_j^{n+1/2}, U_{j+1/2}^n\}$ разностного решения следует монотонное убывание

$$u_j^{n+1/2} \geq U_{j+1/2}^{n+1} \geq u_{j+1}^{n+1/2} \quad \forall j \quad (3.4)$$

последовательности значений $\{u_j^{n+1/2}, U_{j+1/2}^{n+1}\}$ этого решения, где величины $U_{j+1/2}^{n+1}$ вычисляются по формуле (2.9). Поскольку второе из неравенств (3.4) можно переписать в виде

$$U_{j+1/2}^n + r_{j+1/2}^{n+1/2} u_j^{n+1/2} \geq (1 + r_{j+1/2}^{n+1/2}) u_{j+1}^{n+1/2},$$

то его выполнение следует из условий (3.1). Записывая первое из неравенств (3.4) в виде

$$r_{j+1/2}^{n+1/2} u_{j+1}^{n+1/2} \geq U_{j+1/2}^n - (1 - r_{j+1/2}^{n+1/2}) u_j^{n+1/2},$$

с учетом (1.11) и (3.2) получим, что оно будет выполнено при условии

$$u_{j+1}^{n+1/2} \geq \varphi_{j+1/2}^n = \frac{U_{j+1/2}^n - (1 - r_{j+1/2}^{n+1/2}) u_j^n}{r_{j+1/2}^{n+1/2}}, \quad (3.5)$$

которое с учетом (1.10) можно представить в виде

$$u_{j+1}^{n+1} \geq \psi_{j+1/2}^n = \frac{2(U_{j+1/2}^n - (1 - r_{j+1/2}^{n+1/2}) u_j^n)}{r_{j+1/2}^{n+1/2}} - u_{j+1}^n. \quad (3.6)$$

Таким образом, для выполнения неравенств (3.4) достаточно, чтобы потоки $u_{j+1}^{n+1/2}$ удовлетворяли ограничениям

$$U_{j+1/2}^n \geq u_{j+1}^{n+1/2} \geq \max(u_{j+1}^n, \varphi_{j+1/2}^n), \quad (3.7)$$

которые с учетом (3.3) и (3.6) можно переписать в виде ограничений

$$w_{j+1/2}^n \geq u_{j+1}^{n+1} \geq \max(u_{j+1}^n, \psi_{j+1/2}^n) \quad (3.8)$$

на потоки u_{j+1}^{n+1} . Эти ограничения корректны, поскольку в силу условий монотонности (2.1) имеют место неравенства $U_{j+1/2}^n \geq u_{j+1}^n$ и $U_{j+1/2}^n \geq \varphi_{j+1/2}^n$, последнее из которых с учетом (3.5) можно представить в виде $(1 - r_{j+1/2}^{n+1/2})(u_j^n - U_{j+1/2}^n) \geq 0$.

Монотонность (3.4) последовательности $\{u_j^{n+1/2}, U_{j+1/2}^{n+1}\}$ обеспечивает монотонность на $(n+1)$ -ом временном слое последовательности консервативных переменных $\{U_{j+1/2}^{n+1}\}$, но в общем случае (как следует из результатов предыдущего раздела) не гарантирует монотонности (2.2) всего разностного решения $u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}$. Поэтому после вычисления консервативных переменных по формуле (2.9), в которой потоки $u_j^{n+1/2}$ удовлетворяют ограничениям (3.7), необходима дополнительная коррекция потоков u_j^{n+1} , обеспечивающая выполнение условия

$$U_{j+1/2}^{n+1} \geq u_{j+1}^{n+1} \geq U_{j+3/2}^{n+1} \quad \forall j, \quad (3.9)$$

которое эквивалентно условию монотонности (2.2).

В случае монотонного возрастающего (2.3) на n -ом временном слое разностного решения $u_j^n, U_{j+1/2}^n$ ограничения аналогичные (3.7)-(3.9) имеют следующий вид

$$U_{j+1/2}^n \leq u_{j+1}^{n+1/2} \geq \min(u_{j+1}^n, \varphi_{j+1/2}^n),$$

$$w_{j+1/2}^n \leq u_{j+1}^{n+1} \leq \min(u_{j+1}^n, \psi_{j+1/2}^n), \quad (3.10)$$

$$U_{j+1/2}^{n+1} \leq u_{j+1}^{n+1} \leq U_{j+3/2}^{n+1} \quad \forall j. \quad (3.11)$$

В результате модификация схемы кабре, обеспечивающая ее монотонность в смысле определения 1, имеет следующий вид.

На первом этапе по разностным уравнениям (2.5) вычисляются значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1/2}$. На втором этапе по формулам (1.4) находятся предварительные значения потоков на $(n+1)$ -ом временном слое, которые с учетом неравенств (3.8) и (3.10) корректируются по формуле

$$\bar{u}_{j+1}^{n+1} = F\left(\bar{u}_{j+1}^{n+1}, \bar{m}_{j+1/2}^n, \bar{M}_{j+1/2}^n\right), \quad (3.12)$$

в которой

$$\bar{m}_{j+1/2}^n = \min\left(w_{j+1/2}^n, \max\left(u_{j+1}^n, \psi_{j+1/2}^n\right)\right), \quad \bar{M}_{j+1/2}^n = \max\left(w_{j+1/2}^n, \min\left(u_{j+1}^n, \psi_{j+1/2}^n\right)\right). \quad (3.13)$$

На третьем этапе из уравнения

$$U_{j+1/2}^{n+1} = U_{j+1/2}^{n+1/2} - \frac{r_{j+1/2}^{n+1/2}}{2} \left(\bar{u}_{j+1}^{n+1} - \bar{u}_j^{n+1}\right), \quad (3.14)$$

которое эквивалентно уравнению

$$U_{j+1/2}^{n+1} = U_{j+1/2}^n - r_{j+1/2}^{n+1/2} \left(\bar{u}_{j+1}^{n+1/2} - \bar{u}_j^{n+1/2}\right), \quad (3.15)$$

где $\bar{u}_j^{n+1/2} = (u_j^n + \bar{u}_j^{n+1})/2$, вычисляются консервативные переменные $(n+1)$ -ом временном слое.

На четвертом, заключительном этапе, с учетом ограничений (3.9) и (3.11) проводится вторая коррекция потоков

$$u_{j+1}^{n+1} = F\left(\bar{u}_{j+1}^{n+1}, m_{j+1}^{n+1}, M_{j+1}^{n+1}\right), \quad (3.16)$$

в которой

$$m_{j+1}^{n+1} = \min\left(U_{j+1/2}^{n+1}, U_{j+3/2}^{n+1}\right), \quad M_{j+1}^{n+1} = \max\left(U_{j+1/2}^{n+1}, U_{j+3/2}^{n+1}\right). \quad (3.17)$$

В равенствах (3.12) и (3.16) функция $F(u, m, M)$ определяется по формуле (1.7).

Отметим, что вторая коррекция потоков (3.16), которая проводится после применения основной дивергентной формулы (3.15), не приводит к нарушению консервативности схемы кабре [12], поскольку эту коррекцию следует рассматривать как первый шаг на пути вычисления потоков $\bar{u}_j^{n+3/2}$, необходимых для определения по формуле (3.15) значений консервативных переменных на $(n+2)$ -ом временном слое.

4. Результаты тестовых расчетов.

На рис. 2-4 на три последовательных момента времени приведены результаты тестовых расчетов по различным вариантам схемы кабре задачи Коши для линейного уравнения переноса (1.1) со следующими разрывными кусочно-постоянными начальными данными

$$v(0, x) = \begin{cases} b_2, & x \leq x_i \\ b_1, & x_i < x < x_{i+2}, \\ 0, & x \geq x_{i+2} \end{cases} \quad b_1 = 1, \quad b_2 = \frac{8}{3},$$

(4.1)

где x_i – заданный узел сетки (1.2). Точками показаны значения потоковых переменных u_j^n , а кружками – консервативных переменных $U_{j+1/2}^n$. В порядке возрастания индекса j центры этих кружков соединены тонкой линией. Более жирной линией приведено точное решение задачи (1.1), (4.1). На рис. 2 и 3 приведены расчеты на равномерной сетке (1.2), где

$$h_{j+1/2} = h = \text{const}, \quad \tau_{n+1/2} = rh/a = \text{const},$$

при числах Куранта $r = 0.25$ (рис. 2) и $r = 0.75$ (рис. 3). На рис. 4 показаны расчеты на неравномерной по пространству сетке (1.2), где с учетом (1.10)

$$h_{j+1/2} = \begin{cases} h, & j = 2k \\ h/3, & j = 2k + 1 \end{cases}, \quad \tau_{n+1/2} = \frac{h}{4a} = \text{const} \Rightarrow r_{j+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} 1/4, & j = 2k \\ 3/4, & j = 2k + 1 \end{cases}. \quad (4.2)$$

На рисунках с индексами (а) и (б) приведены результаты расчетов по двум вариантам схемы кабаре с однократной коррекцией потоковых переменных, при которой используются минимальные и максимальные значения, задаваемые соответственно формулами (1.6) и (2.22). Первую из этих схем будем называть схемой I, а вторую – схемой II. Расчеты задачи (4.1), полученные по схеме кабаре, в которой при коррекции потоковых переменных используются минимальные и максимальные значения, задаваемые формулами (2.21), полностью совпали с результатами, полученными по схеме I, поэтому отдельно их приводить не будем. На рисунках с индексом (в) показаны результаты расчетов по монотонному варианту схемы кабаре (1.3), (1.4), (3.12)-(3.17) с двукратной коррекцией потоковых переменных (эту схему будем называть схемой III).

Из рисунка 2 следует, что при числе Куранта $r = 0.25$ (при котором, как показано в [9], на равномерной сетке полутарослойный вариант схемы кабаре [3] с однократной коррекцией потоков (2.21) является монотонным) схемы I и II имеют осцилляции в центральной части точного решения соответственно на первых трех и двух временных шагах, после чего получаемые по ним разностные решения становятся монотонными. В то же время, как видно из рисунка 3, при числе Куранта $r = 0.75$, когда схемы I и II становятся немонотонными в смысле результатов работы [9], осцилляции, возникающие в их решениях на первых временных шагах, постепенно перемещаются за линию второго разрыва точного решения, где продолжают существовать в течение всего времени счета. Из рисунка 4 следует, что в случае неравномерного пространственного шага (4.2) схемы I и II имеют осцилляции в центральной части точного решения соответственно на первых двух и трех временных шагах, после чего получаемые по ним разностные решения становятся монотонными. При этом (в полном соответствии с теорией) решения, получаемые по схеме II,

являются монотонными относительно потоковых переменных и немонотонными относительно консервативных переменных. Решения, получаемые по монотонной схеме III, во всех трех случаях (рис. 1-3) остаются монотонными во все моменты времени.

5. Заключение.

Обнаруженная в данной работе немонотонность двухслойной по времени схемы кабаре I, которая применяется в работах [7, 8] при моделировании сложных газодинамических и гидравлических течений, при числах Куранта $r \in (0, 0.5]$ носит локальный характер и проявляется при достаточно специфических монотонных начальных данных вида (2.19). При этом возникающие схемные осцилляции подавляются за несколько временных шагов и исходная монотонность разностного решения восстанавливается. Последнее, однако, в значительной мере связано с тем, что схема кабаре, в силу применяемой коррекции потоков, имеет лишь первый порядок сходимости в областях локальных экстремумов и поэтому их сильно подавляет, что скорее следует отнести к ее недостаткам, которые требуют исправления. Тем самым монотонная модификация III схемы кабаре безусловно является предпочтительней, тем более, что она сохраняет все достоинства исходной схемы, в частности компактность шаблона и диффузионно-дисперсионные свойства на гладких решениях. Данная модификация естественным образом обобщается на квазилинейный закон сохранения, позволяя обеспечить TVD-свойство разностного решения, и на квазилинейные системы законов сохранения, гарантируя монотонность разностной схемы относительно всех вариантов линейного приближения аппроксимируемой системы.

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2013 годы» (проект № 07.514.11.4106).

Список литературы

1. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. – М: Наука, 1978.
2. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов Ф. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М: Физматлит, 2001.

3. Головизнин В.М. Балансно-характеристический метод численного решения уравнений газовой динамики // Докл. РАН. 2005, т. 403, № 4, с.1-6.
4. Woodward P., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comp. Phys. 1984, v. 54, n. 1, p. 115-173.
5. Головизнин В. М., Самарский А. А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование. 1998, т. 10, № 1, с. 86-100.
6. Головизнин В. М., Самарский А. А. Некоторые свойства разностной схемы «Кабаре» // Матем. моделирование. 1998, т. 10, № 1, с. 101-116.
7. Karabasov S. A., Goloviznin V. M. New efficient high-resolution method for nonlinear problems in aeroacoustics // AIAA J., 2007, v. 45, n. 12, p. 2861-2871.
8. Karabasov S. A., Berloff P. S., Goloviznin V. M. Cabaret in the ocean gyres // Ocean Modelling. 2009, v. 30, n. 2, p. 155-168.
9. Остапенко В. В. О монотонности балансно-характеристической схемы // Матем. моделирование. 2009, т. 21, № 7, с. 29-42.
10. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. Сборник. 1959, т. 47, № 3, с. 271-306.
11. Kroener D. Numerical schemes for conservation laws. – Wiley, Teubner, Leipzig. Germany. 1997.
12. Остапенко В. В. Об эквивалентных определениях понятия консервативности для конечно-разностных схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1989, т. 29, № 8, с. 1114-1128.

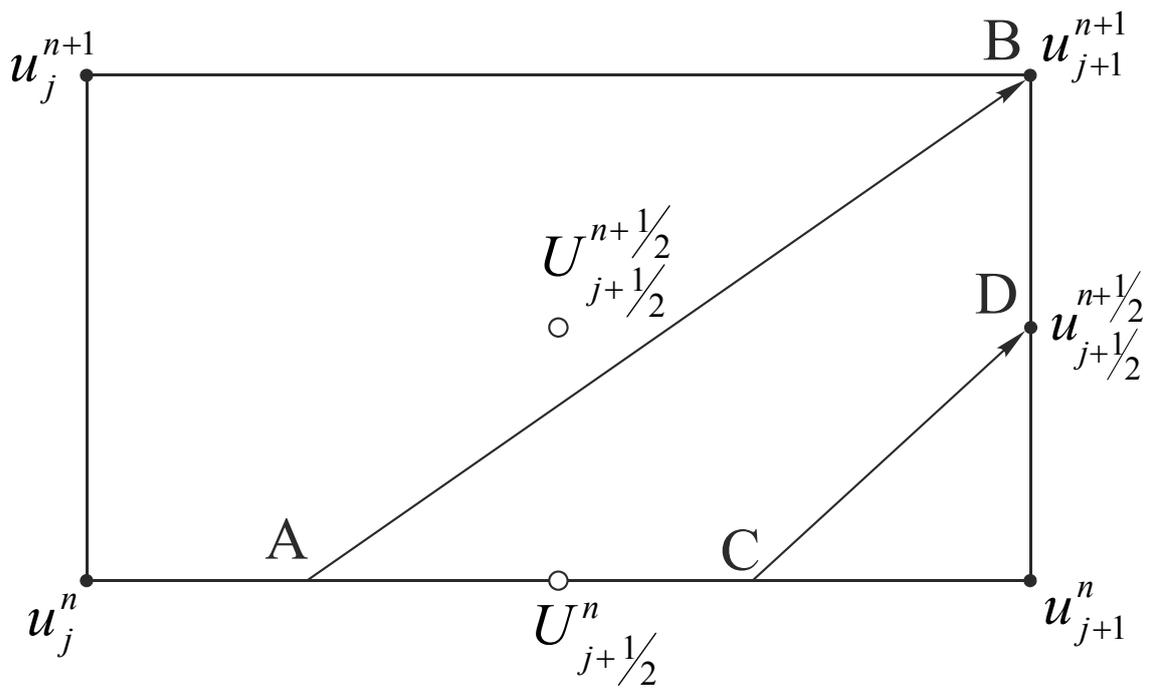


Рис. 1.

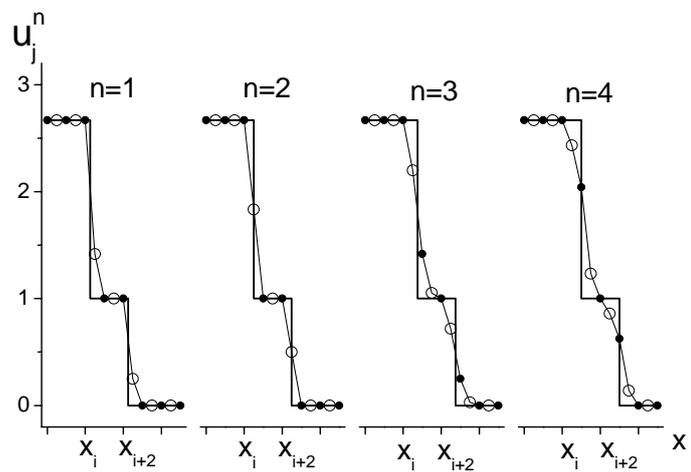
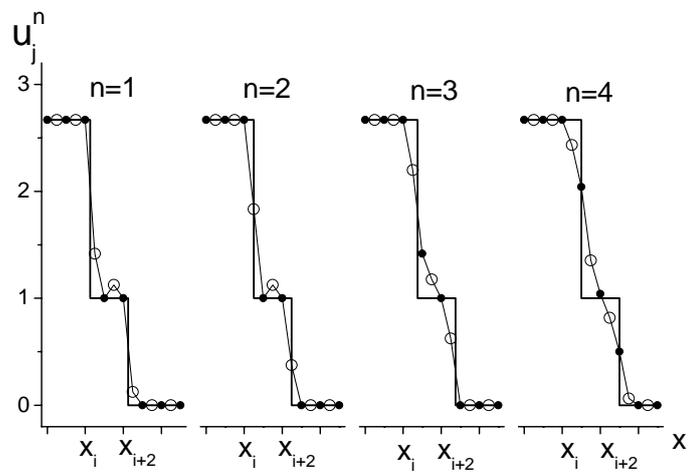
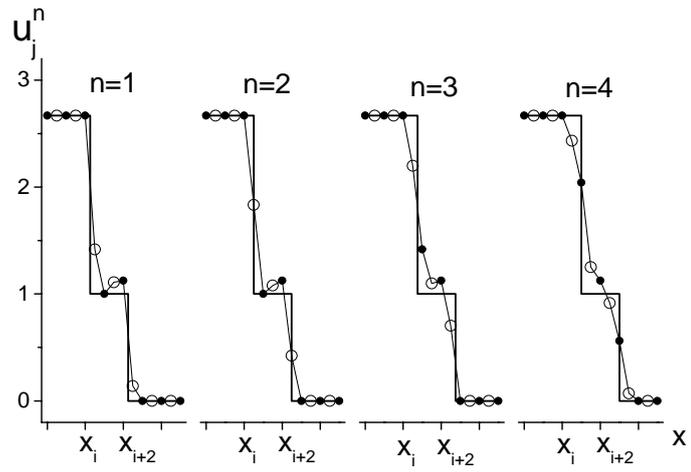


Рис. 2.

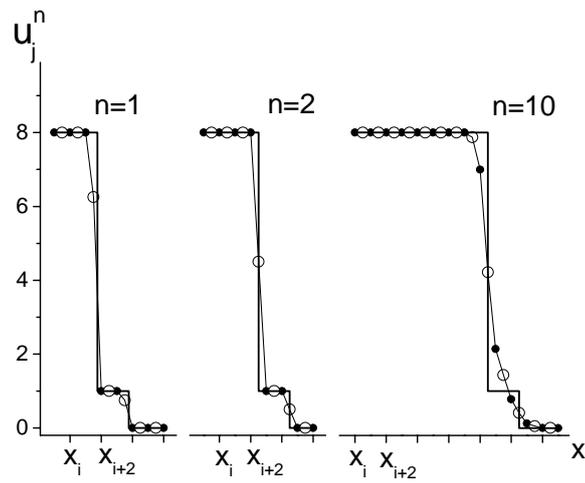
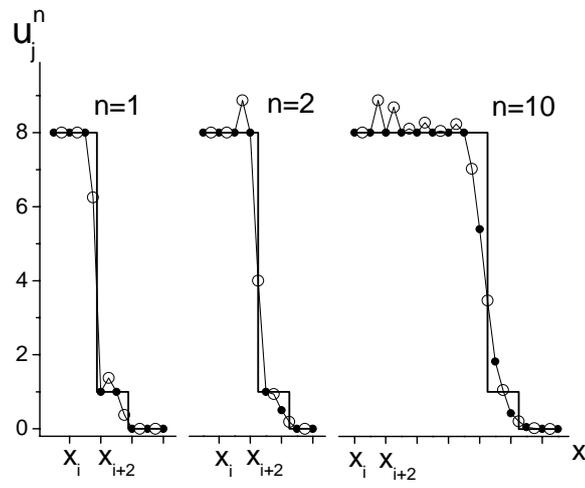
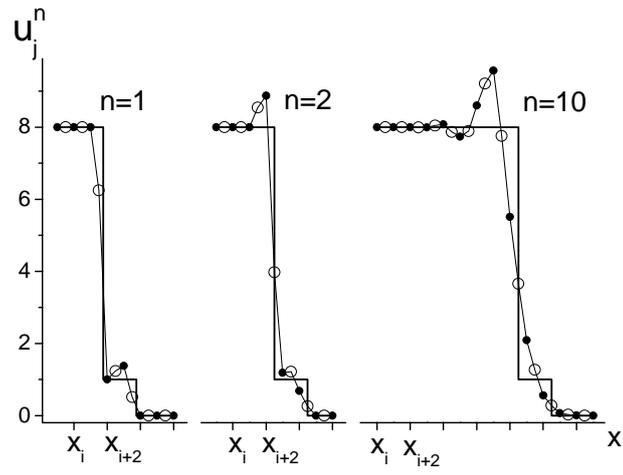


Рис. 3.

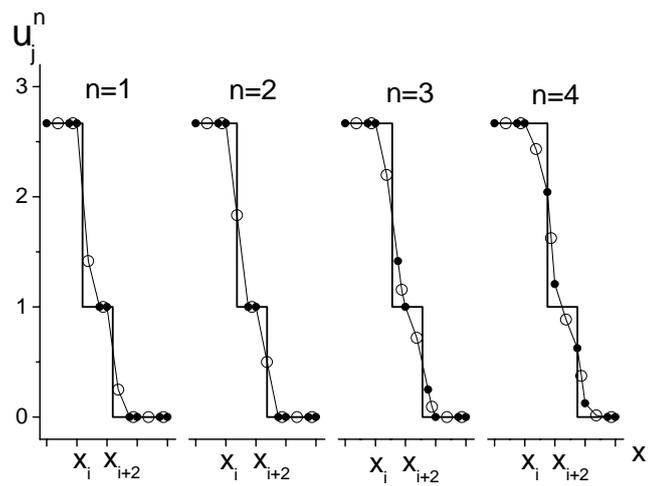
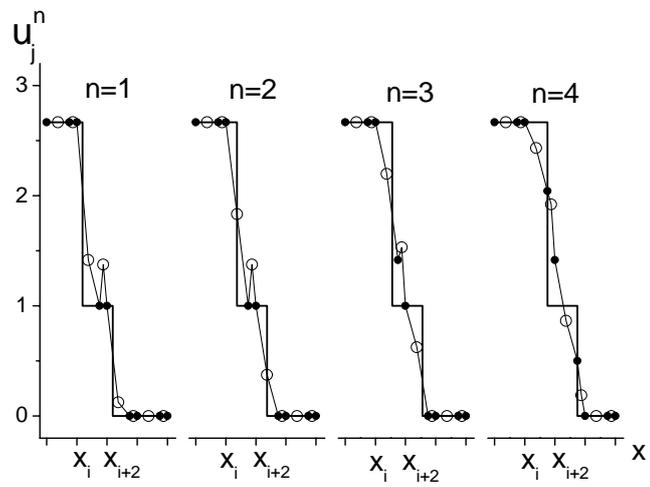
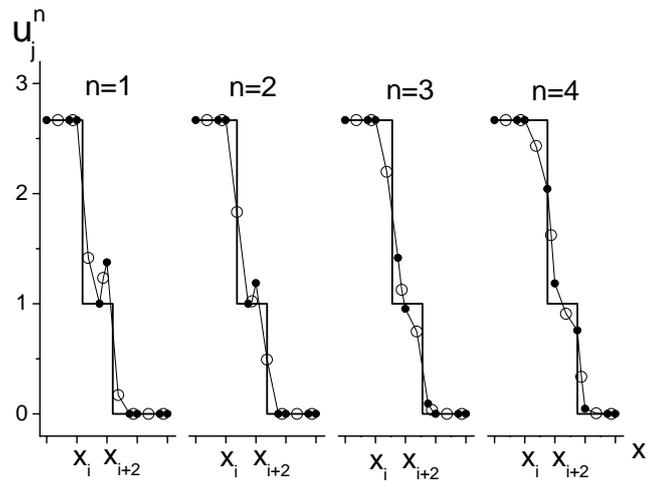


Рис. 4.